沖縄科学防災環境学会論文集 (Physics), Vol.2, No.1, 8-14, 2017

流体運動の支配方程式とその歴史的変遷

仲座　栄三[1]

[1]正会員　琉球大学工学部環境建設工学科（〒903-0213 沖縄県西原町字千原１番地）
E-mail: enakaza@ tec.u-ryukyu.ac.jp

1687年に提示された質点に対するNewtonの運動法則（運動方程式）は，1757年にEulerによって流体の基礎方程式へと拡張された．次いで，Navierによって粘性項が付加され，1845年，Stokesによって平均圧力の導入が行われた．これにより，Navier-Stokesの方程式が確立された．以降，この方程式は，現代にいたるまで流体力学の分野で幅広く用いられて来ている．現在，Navier-Stokesの方程式は天文学的スケールの運動からミクロスケールの流体運動の予測にまでも用いられており，我々に大きな恩恵をもたらしてきている．本論は，そのNavier-Stokesの方程式を修正し，Navierから始まり半世紀余も続いた係数論争に，その勃発からおよそ200年を経て，終止符を打つものとなっている．

Key Words : *Navier-Stoeks equation, Newton's viscousity law, real fluid, motion equation*

1. はじめに

ニュートンは，質点の運動の法則について1687年にプリンキピアにまとめた．その第2法則が，後に運動方程式の形に表される．水や空気など，流体の運動方程式は，Euler（1757）によって提示された[1]．Eulerは同時に質量保存方程式をも示している．Eulerは，運動方程式を与えたのみでなく，ある条件下でその運動方程式が積分できることを示し，現在Bernoulliの定理と呼ばれるエネルギー保存式を与えた．Eulerの与えた運動方程式は，エネルギー散逸項を含まないことから理想流体の運動方程式と呼ばれている．

Navierは，数学者でありかつ，橋梁技術者であった．彼は，パリのセーヌ川を横断する橋梁の設計によって広く世間の通目を浴びたが，その橋は橋脚の一つが沈下したため建造後まもなく破損してしまった．1822年，Navierは，「流体の運動法則に関する論文」を提出している[1]．その中で，流体の運動方程式に分子間に働く力を表す項（現在，摩擦項，あるいは粘性項と呼ばれる）が付加された．この時代には，弾性材料に対するHookeの法則がいかような形に表されるべきかが議論されている．

Navierは分子間に働く力を議論し，弾性材料に対するHookeの法則には，ただ1つの弾性係数が表れるとした．そのことは流体の摩擦応力（粘性応力）にも適用され，Eulerの与えた流体の運動方程式に，分子間に働く力を表す項として1つの係数を有する粘性項が付加された[2]．この時点で，流体の運動方程式は，数学的には2階の偏微分方程式となった．

弾性材料に対するHookeの法則及び，粘性流体に対する粘性応力に関して，係数論争が半世紀にも亘って繰り広げられている．Navierは等方性物質に対する係数は1つであると主張し，Cauchy，Poisson，Saint Venantらがこれを支持した．Geenの与えた理論においては，弾性係数が2つ含まれていた．Stokes，Lamé，Neumann，Maxwellらが2係数論を支持した．実験的には，PoissonやWertheimが単1係数論を支持した．しかし，Kupfer，Neumann，Voigtらの実験結果は，2つの係数の存在を支持した．実験はさらに彼らの弟子たちによって引き継がれ，実験結果は，ますます2係数論派を支持するようになった[2]．今日に至っては2係数の存在が一般的となっている．しかし，これについては，Nakaza（2005）が異論を唱え，等方性材料のHookeの法則に関する弾性係数は，ただ1つとすべきであり，他に内部応力として圧力（密度と温度の関数）の存在を認めることが必要であるとする主張が行われいる[3),4)]．

Greenは若くして死した．Greenの後，ケンブリッジ大学において流体力学及び光学の研究を深めたのはStokesであった．Stokes（1845）は，粘性応力の項を体積変形速度に依存する項と純粋せん断変形速度に比例する項とに分離した．それ以降，粘性応力は2つの係数（現在では，これらを体積粘性係数χ及びせん断粘性係数μと呼んでいる）をもって特徴づけられるようになる[5]．

Stokesは，論文の中で，「… Poissonが同様な方程式を導いていることを知ったが，彼の理論は1つの係数を持つものであった．」と述べている．また，「… Cauchyの理論は極めて類似しているが，断熱変化，すなわち熱力学を考慮していない点で私の理論と幾分異なる．」とも述べている．

Stokes は，運動中の圧力について述べ，次のように説明している[5]．

「… 一様な膨張運動の場合の圧力は，いかなる瞬間においても，密度と温度にのみに依存する（これは，圧

力の局所的熱平衡圧近似と呼ぶことができる）．圧力は，密度が時間的に変化する割合には依存しないものと仮定すると，我々は直ちに$\chi=0$と置くことができる（これは後に，Stokes 条件，あるいは Stokes の仮説と呼ばれる）． 摩擦流体の理論を適用することが興味深いようなほとんどの場合において，流体の密度は一定であるか，または感知可能な誤差を伴うことなく，一定と見なせる．そうでなければ，時間と共にゆっくり変化する．この場合，χがゼロに等しいかどうかには係わらず，圧力はほぼ局所的熱平衡圧で与えられる．したがって，理論と実験がこのような場合に一致するとしても，係数χをゼロとみなすことについて，実験はかならずしも検証を与えている訳ではない．」

Stokes の仮説を導入するとき，圧力は，3 軸方向の応力の平均値の符号を変えた値で与えられる．これは現在平均圧力と呼ばれている．平均圧力については後に詳しく説明する．Stokes は，流体の運動方程式を与えた後，その応用として，流体中の振り子の減衰問題を取り扱った．また，Stokes は，流体の運動方程式の解析解の事例として，管の中の流れ（流体力学において現在よく知られる Hagen-Poiseuille 流）を得ていたが，実験値と合わなかったことから，その発表を見送ったと言われている．このことに関しては，1883 年にドイツにおいて，Reynolds による実験及び，乱れによる付加的な応力（Reynolds 応力）の導入により解決されることとなったが，管内流の乱流に対する流速分布式を得るには Prandtl の混合距離理論及びその弟子である Karmann の出現を俟たなければならなかった[6]．

流体力学上，Navier に始まる実在流体の運動に対する支配方程式の構築の試みは，Stokes によって完成させられた形となり，流体運動の支配方程式は，現在，Navier-Stokes の運動方程式（あるいは，Navier-Stokes 方程式）と呼ばれている．

ところで，体積粘性係数をゼロと置くことができ，運動流体中の圧力が熱平衡圧で与えられるとした Stokes の仮説は，様々な局面で議論されている．気体分子運動論的には，単原子気体の場合に限り Stokes の仮説が支持されている．その他の多原子気体についてはその根拠がなくなるが，実験的に体積粘性係数は粘性係数と同程度の大きさとなることが示されている．

Lamb（今井功・橋本英典訳，1988）[7]は，「… 体積粘性係数χの取りうる精密な値についてはなんら実験的な証拠はないようである．しかし，気体運動論によれば$\chi=0$であるから，簡単のためにこの仮説を採用しよう．もし公式の中でχを残すことが望ましければ，必要な修正は容易に行うことができる．」と述べている．

Schlichiting（1955）[8]は，彼の有名な著書 *Boundary-LayerTheory* において，Stokes の仮説を取り上げ，体積粘性係数χをゼロと置くことについて，「… Stokes の条件を，純粋に仮説あるいは推測と見なしたとしても，その仮定の下で得られる運動方程式は，極めて厳しい条件下においてさえも，非常にたくさんの実験的検証に耐えてきており，それは確からしさをもって受け入れるべきであろう．」と述べている．

Batchelor（1967）[9]は，著書 *Fluid Dynamics* において，「… 流体運動が球対称運動となる場合，粘性応力が作用しないという結論に至る．しかし，等方的な膨張運動であっても，非平衡的な現象が起こり得るだろうか？起こりうる．しかし，それが重要な意味を持つのはごくまれなことである．」と述べている．

Schlichiting 及び Batchelor ともに，Stokes の仮説は受け入れざるを得ないと述べているものの，球対称振動問題に対して，粘性による減衰が現れないこと，すなわちエネルギー減衰が生じないことを例示し，さらなる議論の必要性を指摘している．

Lighthill（1956）[10]は，通常の圧力状態で単原子気体の場合に体積粘性係数χをゼロと置けることの妥当性について，単原子気体を用いた音波の波速及び振幅減衰に関する Greenspan（1950）[11]や Boyer（1952）[12]らの実験結果を引き合いに出している．

ランダウ・リフシッツ（竹内均訳，1970）[13]は，「… 実際に，ほとんどの流体は非圧縮と見なすことができるため，一般に重要性を持つのは粘性係数μのみである．」と述べ，運動方程式から単純に第 2 の粘性係数χの項を落としている．次いで，第 2 の粘性係数は通常粘性係数μと同程度であるが，平衡の回復過程の緩和時間が長い場合について，第 2 の粘性係数は無視できなくなる事を示し，「… 粘性係数μが物性値として定義されるのに対して，第 2 の粘性係数χは，流体運動の振動数など運動形態の影響を受ける．」と述べている．

日本における流体力学の教科書では，今井功（1973）[14]が，Stokes の仮説について幾分詳しく説明している．今井は，Stokes の仮説について，「… 実は確実な理論的根拠があるわけではない．ただ，気体運動論によると，単原子気体では，…高圧高密度の気体の場合を除けば，Stokes の関係を採用してもよい．しかし，多原子気体の場合には，このような理論的裏づけはない．また実験的に第 2 の係数を求めることも極めて困難なので，さしあたり Stokes の関係を使うというのが実情である．」と述べている．

ところで，Navier-Stokes の運動方程式には，粘性項に係数 1/3 が存在する．これは，圧力に平均圧力が導入されていることの証である．したがって，Navier-Stokes の方程式にとって，それは本質的な係数となる．これに関し，「… 均質で等方的な流体を取り扱う Naiver-Stokes の運動方程式に，次元数を表す係数 1/3 が入っていることに納得がいかない．」このような主張が，インターネット上の解説（福森栄次氏 FEM に関する解説[15]）に見いだされた．著者は，Navier-Stokes の運動方程式を，いわば「神の与えた方程式」として長年崇拝してきたことから，その主張を衝撃をもって受け止めた．ここから，この問題に対する著者の長い取り組みが始まる．7 年間の格闘の末に著者がたどり着いた結論が，文献 3) にまとめられている．弾性体の部分のみについては，文献 4) に改めてまとめた．本論においては，こうした取り組みの一部が紹介される．

著者のこのような取り組みに対して，粘性応力項の議論は，「単に粘性項のモデル化の問題に過ぎない」とす

る指摘をしばしば受ける．しかし，すでに説明するように，この問題の本質は，粘性応力の構築にとどまらず，「実在流体の運動中の圧力とは何を意味するか？」というような圧力の定義，さらには気体分子運動論にもとづく熱力学的内部過程の議論，力学的エネルギーの熱エネルギーへの遷移の議論にまでも不可避的に及んでいる点に注意が必要である．

2. 流体運動の支配方程式の歴史的変遷

質点の運動に対するNewtonの運動方程式は，一般に次のように表される．

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{f} \tag{1}$$

ここに，m は慣性質量，$\mathbf{v}$ は速度ベクトル，t は時間，$\mathbf{f}$ は外力ベクトルを表す．

Eulerは，1757年に，流体の運動方程式を単位体積当たりに，次のように与えている．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{X}-grad\ p \tag{2}$$

ここに，ρ は流体密度，$\mathbf{X}$ は外力加速度，p は圧力である．

Navierは，1823年頃に，次の式を与えている．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{X}-grad\ p+\mu\nabla^2\mathbf{v} \tag{3}$$

ここに，右辺の第3項が粘性応力項と呼ばれる．μ は粘性係数である．

Stokesは，1845年に，次の式を与えている．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{X}-grad\ p+\mu\nabla^2\mathbf{v}+\frac{1}{3}\mu\, grad\,(div\,\mathbf{v}) \tag{4}$$

ここに，p は圧力を意味するが，そのことについては後に，詳しく説明される．

Nakaza（2005）の与えた運動方程式は，次のとおりである．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{X}-grad\ p+\mu\nabla^2\mathbf{v}+\mu\, grad\,(div\,\mathbf{v}) \tag{5}$$

ここに，p は圧力を意味するが，後に詳しく説明される．Nakazaの方程式では，Stokesの運動方程式に現れる象徴的な係数 1/3 が取り払われているところに特徴がある．

一方，Euler（1757）の与えた質量保存方程式は，次のように表される．

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=-div\,\mathbf{v} \tag{6}$$

以上に示す運動方程式の導出においては，粘性係数を定数と見なしている．しかし，一般には粘性係数は温度や圧力の関数として与えられることに注意を要する．

3. 内部応力式及び議論

Navier以降，運動方程式には粘性応力項が現れ，人々の注目はそこに及ぶこととなるが，粘性応力の定義は圧力の定義と表裏一体として存在している．

Eulerの与えた内部応力式は，テンソル表記により，次のように表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij} \tag{7}$$

ここに，σ_{ij} は内部応力テンソル，p は圧力，δ_{ij} はKroneckerのデルタテンソルを表す．

Eulerの与えた運動方程式は，ある条件下で解析的に積分され，それはBernoulliの定理（エネルギー保存則）を成す．このとき，密度は圧力のみの関数と仮定される．一般に，Eulerの運動方程式に見る圧力は，静止流体中の圧力と同様に，流体の密度と温度によって決定され，熱力学的には常に平衡状態の圧力を表す．したがって，その値はいかなる瞬間においても熱力学の状態方程式に規定される圧力と同じとなる．

Navierの分子間干渉力を取り入れた内部応力式は，次のように与えられる．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(e_{kk}\delta_{ij}+e_{ij}\right) \tag{8}$$

ここに，p は圧力，e_{ij} は歪み速度テンソルを表す．

Stokesの与えた内部応力式は，次のように表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu\left(e_{ij}-\frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{9}$$

ここに，p は圧力，e_{ij} は歪み速度テンソルを表す．

一方，Nakazaの与えた内部応力式は，次のように表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{10}$$

ここに，p は圧力を表す．

NavierやStokesの時代にはまだテンソル表記が完成していない．したがって，ここではテンソルを用いて簡潔に書けばこのように表されるという意味で表されている．以下，同様である．

Navier（1821）は，弾性材料に対する内部応力として分子間に働く力を考え，次なる関係式を与えている[2)]．

$$\sigma_{ij}=c\left(\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}\right) \tag{11}$$

ここに，σ_{ij} は応力テンソル，c は弾性係数，ε_{kk} は体積ひずみ，ε_{ij} はひずみテンソルを表す．

Navierは，まず弾性材料に対して，分子間に働く力をこのように表し，流体については，圧力に加えて，分子間力が弾性材料と同様に働くと考え，式（8）を与えて

いる．

Poissonは，弾性材料の弾性係数にヤング率とポアソン比の2つを導入したものの，ポアソン比はいかなる材料も1/4を取るものであるとして，弾性係数は1つであると主張している．Cauchy（1822）は，弾性材料に対する内部応力式を次のように2つの係数を用いて表した[2]．

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{12}$$

ここに，λ 及び μ は，粘性係数を表す．

しかし，Cauchyは後に，弾性係数はNaiverの主張のとおり1つの係数であるべきであると主張し，単一係数派に属した．ここに見る2つの係数は，後に，Laméの研究によりLamé係数と呼ばれるようになる[2]．

Green（1828）は，エネルギーの観点からこの事を論じ，弾性係数は2つであると主張した．これを機に，弾性係数を1つとする単一定数派と，2つとする学派とに2分される．

Poisson（1829）は，流体の内部応力式を，当初，Cauchyと同様に表している．しかしながら，先に述べたように，ポアソン比を1/4と置いたため，弾性材料の応力式と同様に，応力式は単一の係数を用い，次のように与えられる．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(e_{kk}\delta_{ij} + 2e_{ij}\right) \tag{13}$$

これに対し，Stokesは，粘性応力に2つの係数を導入し，内部応力の式を法線成分と接線成分とに分け，次のよう表した[5]．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \chi e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{14}$$

次に，法線方向の運動のみを有する膨張運動を考え，圧力はいかなる瞬間においても，密度と温度のみによって決定されると仮定した（圧力の熱平衡圧近似）．これが，Stokesの仮説であり，$\chi = 0$ をもって与えられる．したがって，式（14）より，次式を得る．

$$\sigma_{ij} = -p_e\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{15}$$

ここに，p_e は熱平衡圧を表す．この熱平衡圧は気体の場合，状態方程式から決定される．

式（14）に対して，3軸方向の応力の平均値（平均応力 $\bar{\sigma}$ ）を取ると，次なる関係式が与えられる．

$$\bar{p} = -\bar{\sigma} = p - \chi e_{kk} \tag{16}$$

ここに，$\bar{p}$ は平均圧力と呼ばれる．

すなわち，Stokesの得た式（15）は，平均法線応力の符号を変えた値で与えられる平均圧力を，熱平衡圧と見なすことで与えられる．平均圧力を用い，Stokesの与えた内部応力式は，次のように書ける．

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{17}$$

式（15）あるいは式（17）を，次に示すCauchyの運動方程式に代入することで，式（4）に示すStokesの運動方程式を得る．

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \tag{18}$$

ここに，v_i は速度ベクトルの成分を表す．

流体運動に伴う内部エネルギーの時間変化は，次のように与えられる[9]．

$$\rho\frac{de}{dt} = \left(-\bar{p}\delta_{ij}\right)\left(\frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \tag{19}$$

ここに，e は単位体積当たりの流体の内部エネルギー，T は流体の局所的温度，k は流体の熱伝導率を表す．この式において，右辺第1項は正及び負の値を取り得て可逆的変化を表し，右辺第2項は常に正値を取り不可逆的なエネルギー散逸項（熱的エネルギーへの移行）を表すことになる．ここに圧力が内部法線応力の平均の符号を変えた値で与えられていることに注意を有する．

式（19）より，粘性の作用による力学的エネルギーの散逸率（dispation function）は，単位質量当たりに，次のように与えられる[9]．

$$\phi = \frac{2\mu}{\rho}\left(e_{ij}\cdot e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\cdot e_{kk}\right) \tag{20}$$

ここに，ϕ は力学エネルギーの散逸率を表す．

したがって，ひずみ速度が次式で与えられるような等方的膨張運動に対しては，エネルギー散逸はまったく生じないことになる．

$$e_{ij} = \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \tag{21}$$

この事に関し，先に述べたように，Batchelorは，「…等方的な膨張運動であっても，非平衡的な現象は起こり得る．しかし，それが重要な意味を持つのはごくまれなことである．」と述べており，Stokesの仮説の限界を示唆している．この事に関しては，Schlichitingも議論しており，「… 等方的振動において，通常，流体温度が一定に保たれることは不可能であり，その結果，その運動は温度場を発達させ，そのエネルギーは，温度勾配によって散逸されることになる．」と述べている．

しかし，式（19）の右辺第2項に示すように，力学エネルギーが熱的エネルギーへ移行するためには粘性の作用を必要とする．Stokesの仮説が分子運動論的に認められるとされる単原子気体の場合は，この作用が失われ，この場合，流体の球対称振動に対して永久運動を許してしまうことになる．このようなことは，実在流体に対し

て非現実的であり，たとえ単原子気体の場合であったとしても，そしてそれが実験的に良い近似を与えているとしても，論理的に，Stokesの仮説は受け入れられないということになる．

以上のことを総合し，矛盾のない内部応力式を得るためには，我々は，Stokesの仮説を破棄し，今一度，圧力と粘性応力の定義を行う必要があると結論される．

4. Nakazaの運動方程式の導出とその検証

Nakaza（2005）[3)]は，実在流体の粘性応力について，次のように与えている．

まず，粘性応力が，テンソルを用い，流体の変形速度（ひずみ速度）と線形関係に表されるのであるのならば，その一般形は，次のように表される．

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl} \tag{22}$$

ここに，C_{ijkl} は4階の係数テンソルを表す．また，τ_{ij} は粘性応力テンソルを表す．

式（22）の関係に，対称性及び等方性を導入すると，次なる関係を得る．

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \tag{23}$$

ここに，λ 及び μ は，粘性係数を表す．

しかしながら，Newtonの粘性法則（粘性応力とひずみ速度との線形性）を表すだけなら，その一般形は，次のように書けることで十分である．

$$\tau_{ij} = 2\mu\, e_{ij} \tag{24}$$

これが，Newtonの粘性法則を表す．

結局のところ，等方性流体の粘性応力をこのように位置付けることが，2係数思想から脱却する鍵を与える．

したがって，流体の内部応力式は，次のように与えられる．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \tag{25}$$

ここで，圧力 p が何を表すかが問われる．流体中の圧力は，流体運動が通常の状態であれば，圧力は局所的熱平衡圧で近似されることが気体分子運動論や数多くの実験によって確かめられている．したがって，式（24）の圧力は局所的熱平衡圧で置き換えられ，次のように表される（この仮定が成立しない場合については，後ほど議論される）．

$$\sigma_{ij} = -p_e\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \tag{26}$$

ここに，p_e は局所的熱平衡圧を表す．

式（26）をCauchyの運動方程式に代入し，最終的に，次に示すNakazaの運動方程式を得る．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{X} - grad\ p_e + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mu\, grad\,(div\,\mathbf{v}) \tag{27}$$

Stokesの式（15）に対する運動方程式は，次のように与えられる．

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{X} - grad\ p_e + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu\, grad\,(div\,\mathbf{v}) \tag{28}$$

Nakazaの式（27）においては，Stokesの運動方程式において本質的かつ象徴的な係数となっていた係数1/3が取り払われている．そのことは，圧力に法線応力の平均値が用いられていないことを表す．

仮に流体運動が高圧及び超音速であり，熱力学的内部過程を無視できないような場合，圧力の緩和を考慮して，Nakazaの内部応力式は，次のように与えられる．

$$\sigma_{ij} = -(p_e - \varsigma\, div\,\mathbf{v})\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \tag{29}$$

ここに，ς は圧力緩和係数と定義される．

一方，Stokesの定義によれば，次なる関係式が与えられる．

$$\sigma_{ij} = -(\bar{p} - \chi\, div\,\mathbf{v})\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{30}$$

ここに，χ はStokesの第2粘性係数（体積粘性係数）を表す．

Nakazaの式（29）は，平均応力を次のように与える．

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -(p_e - \varsigma\, div\,\mathbf{v}) + \frac{2}{3}\mu\, e_{kk} \tag{31}$$

したがって，

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} - \frac{2}{3}\mu\, e_{kk} = -(p_e - \varsigma\, div\,\mathbf{v}) \tag{32}$$

すなわち，観測される内部応力の平均応力から粘性応力の平均値を差し引いた値（左辺）が，局所的熱平衡圧 p_e へと漸近することを表している．

一方，Stokesの応力式（30）からは，次なる関係を得る．

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -(\bar{p} - \chi\, div\,\mathbf{v}) \tag{33}$$

すなわち，観測される内部応力の平均値（左辺）が，局所的熱平衡圧へと漸近することを表す．

Nakazaの式（27）に対する内部エネルギーの時間変化及び散逸関数は，次のように与えられる．

$$\rho\frac{de}{dt} = (-p_e\delta_{ij})(e_{kk}\delta_{ij}) + 2\mu\, e_{ij}\cdot e_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \tag{34}$$

$$\phi = \frac{2\mu}{\rho}e_{ij}\cdot e_{ij} \tag{35}$$

これらの式に見るように，たとえ単原子気体の場合であっても，そしていかような運動に対しても，粘性の作用（不規則分子運動によるエネルギー散逸作

用）は存在することになる．

実験的に，高圧超音速流体運動でない限り，局所的熱平衡圧は十分な精度で成立することが分かっている．したがって，通常の音波の実験においては，内部応力式は，式（26）で与えられる．式（26）すなわち式（27）に対して，音波の減衰実験（Zmuda，1951）との比較を**図-1**に示す．図示のとおり，Nakazaの運動方程式は，実験値を極めてよく近似している．3原子気体や単原子気体の場合については，文献3) に示してある．

従来の理論式において，$\chi = 2/3\mu$ を与えれば，**図-1**に示す実験値を近似する値を得ることができる．しかしながら，従来の理論式において，実験結果がいかように $2/3\mu$ に近い値を与えていたとしても，それが $\chi = 2/3\mu$ として与えられなければならないとする根拠は存在しない．それにもまして，粘性の作用する実在流体において，内部応力の平均値が局所的熱平衡圧に漸近するとするメカニズムを構築することは困難である．それが可能となるのは，静止流体の場合のみとなる．

力学的エネルギーの散逸率を示す式（20）及び式（35）を比較して一目瞭然のとおり，Nakazaの方程式では，ひずみ速度の存在する箇所にはあまねく力学的エネルギーの散逸が現れるとされる．分子の不規則運動の存在を考えれば，その確からしさが理解されよう．さらには，その式形の美しさに本物の確からしさを感じられよう．

5. おわりに

Stokes は，流体運動の支配方程式を構築したものの，「… 係数 χ をゼロとみなすことについて，実験はかならずしも検証を与えている訳ではない．」と述べ，その妥当性を憂慮していた．Schlichiting は，著書 *Boundary layer theory* において，平均応力がゼロとなる状況の球対称な振動流体に減衰が生じる例を取り上げ，Stokes の仮説について数ページを割き疑問とする点，しかしその仮説を受け入れざるを得ない理由について議論した．しかしながら，結局のところ，Stokes の運動方程式の妥当性は，第 2 粘性係数を実験値に合うように適宜与えることで保証されることとなった．このとき，実験値は通常の運動状態に対して，第 2 粘性係数が μ 程度の値となることを示し続けてきた．しかし，それが厳密に $2/3\mu$ となって与えられるべきであることを知る余地はなかった．

Nakaza は，粘性応力の構築，すなわち Newton の粘性法則の構築において，粘性係数の選定を物理的に取り扱った．このとき，不必要な係数は解から取り除かれた．これは，例えば，微分方程式を満たすいくつかの解の中から物理的判断に基づいて，ただ 1 つの解を選択することに似ている．結局のところ，Green や Stokes を経て，我々は今日に至るまで，2 つの係数の存在から抜け出すことができなかった．Nakaza は，その呪縛から抜け出すために，係数の選定を物理的根拠にもとづいて断行した．その結果がすべてを解き明かす鍵となった．

この展開の解説はすでに文献 3)にて与えてある．しかし，それから 10 年を経ても今なお，旧来の Navier-Stokes

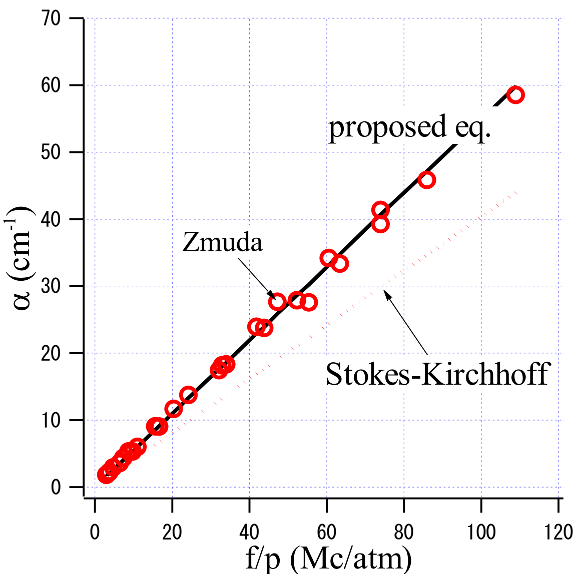

Fig.-1 Comparison between Nakaza's theory and experiment for the attenuation of sound in N_2 gas at 29℃. Attenuation α is plotted against frequency-pressure ratio in MC./at. (see Zmuda[16)]), Table I, 1951). Stokes-Kirchhoff shows the result from the Navier-Stokes equation.

方程式を流体運動の支配方程式として説明する記述が散見される．このことは日本の流体力学界における不名誉と考える．そのことを憂慮し，本論が提出されることとなった．

弾性体の支配方程式の修正については，文献 4)に示してある．文献 3)については，当時，深い霧の中で，まさに暗中模索の中で執筆したがゆえに多くのミスが見いだされる．しかし，どのミスも容易に正しい形に修正できるものとなっているのではないかと考える．その点，寛大な気持ちで読んで頂けたなら幸いである．

先に書いたように，Navier-Stokes 方程式は，流体力学者にとって，普遍的な存在として存在し続けるに違いないと考えられていたのは事実であろう．それが故に，本問題について，これまでに様々な場所で発表してきたが，その都度，厳しい意見を投じられた．しかし，その多くは何の理論的根拠もなかった．

この問題を投じたがゆえに，インターネット上では，個人を嘲笑するような書き込みまでも行われた．この事に対しては，何らかの対応を取る必要もあった．しかし，近年，インターネット上の心無い書き込みによって若者達が傷ついていくのを見聞きするに及び，これに耐える姿勢を示そうと決意した．

ガリレイは，人々の常識としたことに，異議を唱え，真実を人々に示し，そのよろこびを共に共有しようとした．しかし，その行為は歓迎されるどころか，厳しい仕打ちにあった．そのような中にあっても，彼の説明に驚き，この世には，「無数の銀河すら存在する」と，我々がその 400 年後に知ることになる事実をも予想するような，奇抜な発想にまでにも至る者がいたのも事実である．しかし，当時そのような思想は断じて許さるものではなかった．

本論文は，常識とされる問題に対して，その真理を求め，日々努力されている若者達に捧げられるべきである．

謝辞

本研究を行うきっかけを与えたのは，著者の恩師宮崎大学名誉教授河野二夫先生（享年65,）がNavier-Stokes方程式の導出を学生が理解しやすいように検討してほしいとの遺言を残されたことに始まる．また，本研究を長年一心不乱に遂行できたのは，当時琉球大学の教授で私の上司であった津嘉山正光先生が絶えず励まし続けたことに負う．東京工業大学名誉教授の日野幹雄先生には，多くの助言やご指導を頂いた．また，先生の常に物理的考察を求める姿勢に大いに刺激を受けた．琉球大学教授山川哲雄先生，伊良波茂雄先生には常に教育と研究に打ち込む姿勢を教えられた．さらに，元名古屋工業大学教授・元琉球大学教授岡島辰雄先生には，弾性材料の実験や構成則に関して多くのご指導を頂いた．当時大学院博士後期課程に所属していた牧野敏明氏をはじめとして，著者の研究室に所属した大学院生及び学部学生との議論は大変有益であった．本問題の解決には，当時，約7年を要したが，その間，寝るときも起きるときも，夢の中でさえも，本問題を考え続けた．

本論を執筆するに当たっては，「尾崎次郎基金」の支援を受けている．ここに記し，心からの感謝の念を捧げるとともに，感謝の意を表します．

参考文献

1) H. Rouse & S. Ince (1957): *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, 269 p.
2) S. Timoshenko (1983): *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc., New York, 452p.
3) 仲座栄三（2005）：*物質の変形と運動の理論*，ボーダーインク，427p.
4) 仲座栄三（2010）：*新・弾性理論*，ボーダーインク，97p.
5) G. G. Stokes (1945): On the theory of internal friction of fluiss in motion , and of the equiribrium and motion of elastic solids, Cambridge Trans., Vol. XVIII, pp.287-319.
6) 日野幹雄（1974）：*流体力学*，朝倉書店，*469p*.
7) 今井功・橋本英典訳（1988）：*ラム／流体力学 3*，東京図書出版，313p.
8) H. Schlichiting (1955); *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Inc., 814p.
9) G. K. Batchlor (1967): *Fluid Dynamics*, First Edition, Cambridge University Press, 615p.
10) M. J. Lighthill (1956): Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, Surveys in Mechanics, Bachelor&Davis, Cambridge Monographs on Mechanics & Applied Mathmatics.
11) M. Greenspan (1950): Propagation of sound in parefied helium, J. Acoustical Society of America, V22, N.5, pp.568-571.
12) Boyer(1952): Tranlatinal dispersion in monatonic gasses, J. Acoustical Society of America, V24, N.6, pp.716-717.
13) 竹内均訳（1970）：ランダウ・リフシッツ *流体力学 1 及び 2*，東京図書株式会社，596p.
14) 今井功（1973）：*流体力学（前編）*，裳華房 428p.
15) 福森栄次（2005）：*よくわかる有限要素法*，オーム社，287p.
16) A. J. Zmuda (1951): Ultrasonic velocity and absorption in gasses at low pressures, J. Awoustical Society of America, V.23, N.4, pp.472-477.

（2017.3.21 受付）

本論文は、原論文に若干の修正を加えたバージョンである。修正箇所は、「式（９）および式（１０）に係数2が抜けている点、「一定数」を「1係数」へ、「必よう」を「必要」へ、「平均応力」を「平均法線応力」へとした点にある。原論文を読まれる際には、その点への配慮をお願いしたい。Nov.12, 2017.